

MATEMATIKA

vyšší úroveň obtížnosti

MAGVD10C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Didaktický test obsahuje 21 úloh.

- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulačka bez grafického režimu.

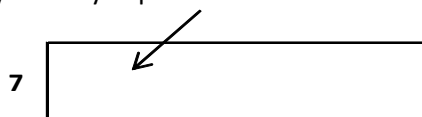
Testový sešit

- První část (úlohy 1–10) didaktického testu tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části (úlohy 11–21) jsou uzavřené úlohy, které obsahují i nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- **Počet bodů** za správně vyřešenou úlohu je uveden **u čísla úlohy vpravo**. Je-li u počtu bodů zkratka max., je možné za řešení úlohy získat i **dílčí body**.
- Za nesprávnou nebo neuvedenou odpověď **se body neodečítají**.
- Poznámky zapsané do testového sešitu nebudou předmětem hodnocení.
- Hodnoceny budou pouze **odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

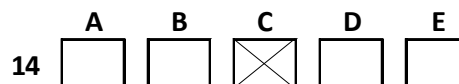
Maximální bodové hodnocení: 50 bodů

Pokyny pro vyplňování záznamového archu

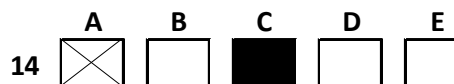
- Pište **modrou** nebo **černou** propisovací tužkou.
- Výsledky otevřených úloh **pište čitelně** do vyznačených polí záznamového archu.



- Je-li požadováno **řešení**, uveďte kromě výsledku **celý postup** řešení.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená pole se **ne načítají a nebudou vyhodnoceny**.
- Nejednoznačný nebo nečitelný zápis bude považován za chybné řešení.
- V úlohách s nabídkou odpovědí vyberte správnou odpověď a vyznačte ji křížkem v příslušném poli záznamového archu.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, zabarvěte pečlivě původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoli jiný způsob záznamu odpovědi a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.
- Pokud zakřížkujete více než jedno pole, bude vaše odpověď považována za nesprávnou.

Testový sešit neotvírejte, počkejte na pokyn!

Úlohy vyřešte a **výsledky** zapisujte do příslušných polí v **záznamovém archu**.

Úloha 1

max. 2 body

Jsou dána čísla $s = 9 \cdot 10^{180}$, $t = 54 \cdot 10^{160}$. Ve stejném tvaru (součin co nejmenšího přirozeného čísla a mocniny deseti) uveďte čísla a, b :

1. $a = s : 45$
2. $b = s^2 : t$

Úloha 2

max. 2 body

Pro $a > 0$ zjednodušte výraz:

$$\frac{(a^2 - 2)^2 - 4}{a^4 + 2a^3}$$

Úloha 3

max. 2 body

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je určena vzorcem $a_n = \frac{300n}{n^2+1}$.

1. Kolik členů posloupnosti je větších než $\frac{3}{5}$?
2. Vypočtěte limitu a_n pro $n \rightarrow +\infty$.

Úloha 4

max. 2 body

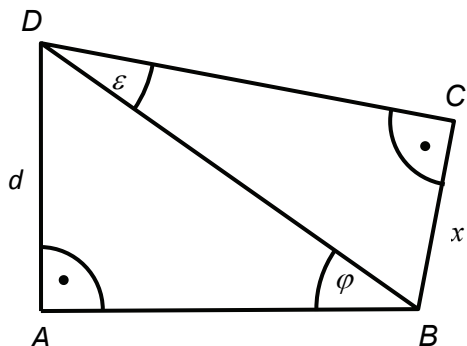
V **R** řešte:

$$x \log 4^{x+1} = (x+1) \log 8$$

Úloha 5

max. 2 body

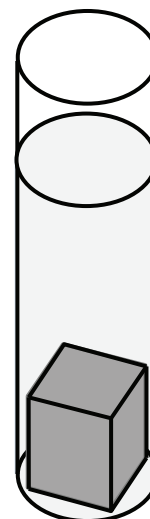
Je dán čtyřúhelník $ABCD$ (viz obrázek). Strana BC má délku x , strana AD délku d , velikosti úhlů BDC a ABD jsou ε a φ , vnitřní úhly při vrcholech A a C jsou pravé. Vyjádřete délku x v závislosti na veličinách ε , φ a d .



Úloha 6

max. 2 body

V nádobě tvaru válce o poloměru podstavy 5 cm sahá voda do výšky 20 cm. Ponořením ocelové krychle hladina stoupne o 4 cm. Kolik centimetrů měří hrana krychle? Údaj zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



Úloha 7**max. 2 body**

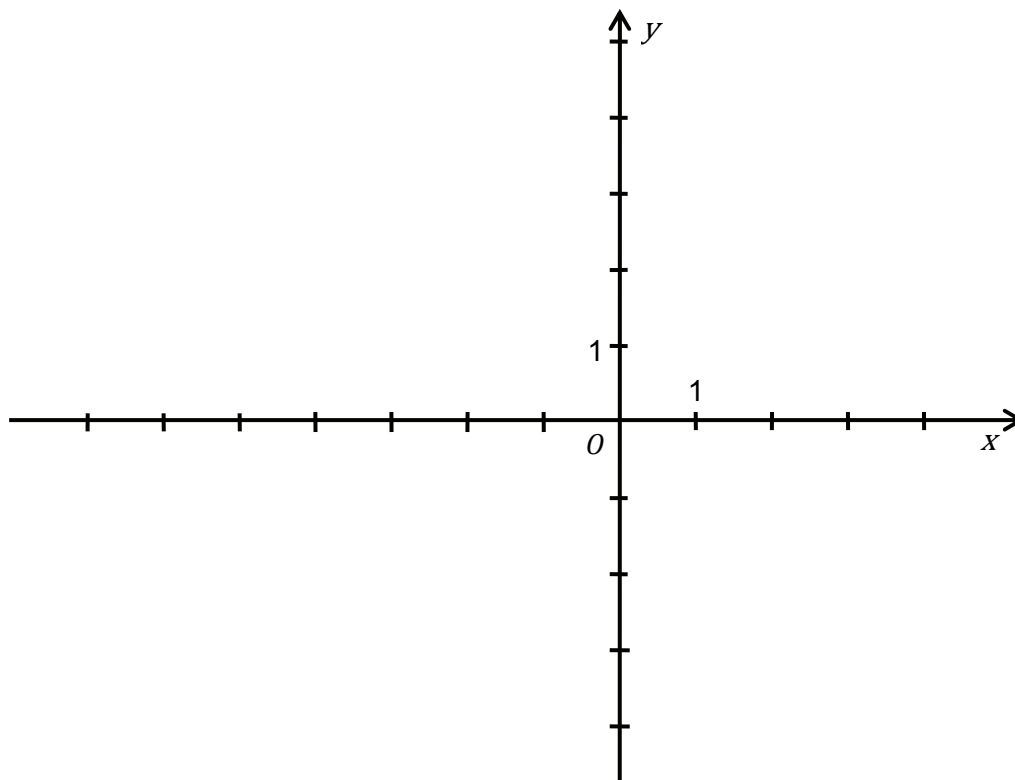
Ze vztahu $y = \frac{x+2}{x+3}$ vyjádřete pro přípustné hodnoty y proměnnou x .

Úloha 8**max. 3 body**

Reálná funkce f s reálnou proměnnou x je dána předpisem:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+3}$$

1. Určete průsečíky X a Y grafu funkce f s osami souřadnic x a y .
2. Sestrojte graf funkce f .



Úloha 9

max. 4 body

Kružnice k se středem S je vepsána do čtverce s vrcholy $A[-4; 0]$, $B[2; -2]$, $C[4; 4]$ a $D[-2; 6]$.

1. Proved'te náčrtek.
2. Určete souřadnice středu S , poloměr r a rovnici kružnice k .

Do záznamového archu **uved'te celý postup řešení** včetně náčrtku!

Úloha 10

max. 4 body

Během prvních 5 dnů se vyrobilo denně v průměru o čtvrtinu výrobků méně, než se vyrobilo v každém z 10 následujících dnů. Celkem se vyrobilo 2 200 výrobků. Kolik výrobků z tohoto počtu připadá na prvních 5 dnů?

Do záznamového archu **uvedte celý postup řešení!**

Každou z následujících úloh vyřešte, vyhledejte **správné** řešení z nabídky a vyznačte je **křížkem** v příslušném poli tabulky záznamového archu.

Úloha 11

max. 3 body

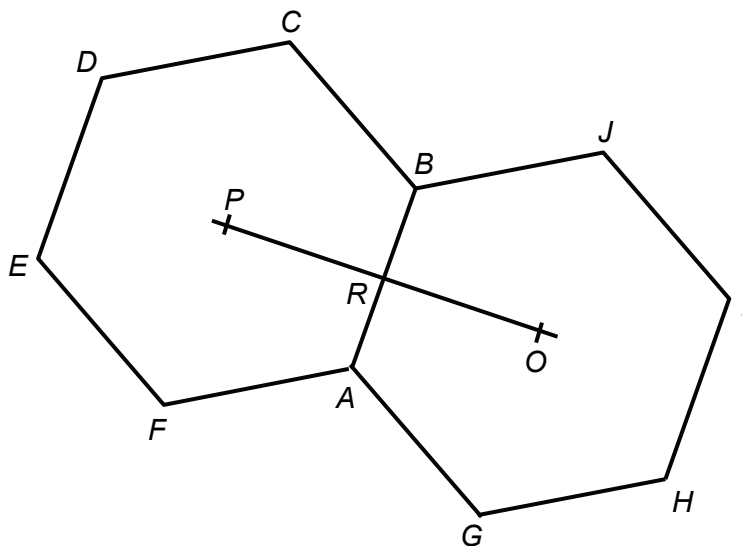
K výrazům 1–3 přiřaďte ekvivalentní vyjádření z nabídky A – E pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

- | | | | |
|----|---------------------------|----|---------------|
| 1. | $(\cos x - \sin x)^2$ | A) | 1 |
| 2. | $\cos^2(-x) + \sin^2(-x)$ | B) | -1 |
| 3. | $1 - \cos 2x$ | C) | $1 - \sin 2x$ |
| | | D) | $2\sin^2 x$ |
| | | E) | není uvedeno |

Úloha 12

max. 3 body

V předpisech zobrazení 1–3 doplňte podle obrázku chybějící symboly z nabídky A – E.

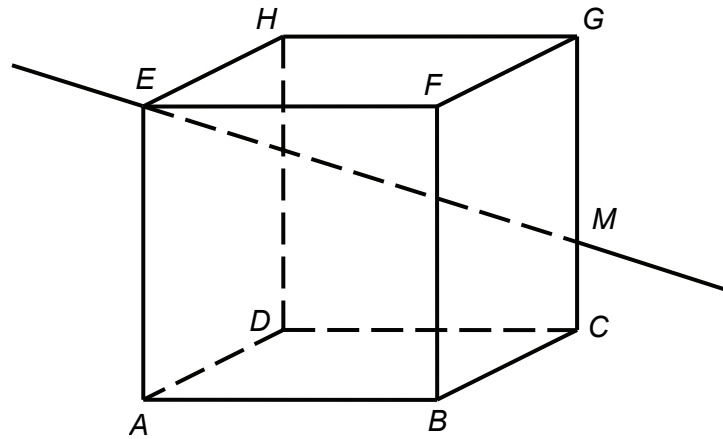


- | | | | |
|----|---|----|------|
| 1. | Ve středové souměrnosti se středem R se úsečka AE zobrazí na ____. | A) | AB |
| 2. | V osové souměrnosti s osou ____ se úsečka DG zobrazí na úsečku IF . | B) | AC |
| 3. | V otočení se středem F o úhel $\alpha = 60^\circ$ se úsečka PO zobrazí na ____. | C) | BI |
| | | D) | EB |
| | | E) | EC |

Úloha 13**2 body**

Bod M je vnitřním bodem hrany CG krychle $ABCDEFGH$. Na které přímce určené vrcholy krychle leží průsečík přímky EM s rovinou ABD ?

- A) na přímce AC
- B) na přímce AD
- C) na přímce BC
- D) na přímce CD
- E) na jiné přímce



Úloha 14**2 body**

Jaká je odchylka φ přímky $p: x\sqrt{3} + y = 0$ a přímky $q: x = \sqrt{3}$?

- A) $\varphi = 90^\circ$
- B) $\varphi = 60^\circ$
- C) $\varphi = 45^\circ$
- D) $\varphi = 30^\circ$
- E) Přímky jsou rovnoběžné.

Úloha 15**2 body**

Určete součet s nekonečné geometrické řady $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, kde pro všechna přirozená čísla n platí:

$$a_n = \frac{4^{n-1}}{2^{3n}}$$

- A) součet neexistuje
- B) $s = \frac{3}{4}$
- C) $s = \frac{3}{16}$
- D) $s = \frac{1}{4}$
- E) jiná reálná hodnota

Úloha 16**2 body**

Pro všechny reálné hodnoty proměnné x platí:

$$(x + m)(x - 2) = x^2 + bx + 8$$

Který zápis bude po dosazení vypočtených hodnot b, m pravdivý?

- A) $b = m + 2$
- B) $b < m$
- C) $b - 2m = 0$
- D) $b > 0$
- E) $b = 2 - m$

Úloha 17**2 body**

Značka automobilu se skládá ze šesti znaků. První tři znaky jsou některá z písmen ABCDEF a po nich následuje trojčíslí z číslic 0 až 9. (Znaky se mohou ve značce opakovat, takže existuje například značka ABA020.) Jaký maximální počet aut lze takto označit, když žádná dvě auta nesmí mít stejnou značku?

- A) 1 216
- B) 27 000
- C) 35 568
- D) 157 464
- E) 216 000

Úloha 18

2 body

Ve firmě jsou zaměstnanci rozděleni do dvou skupin. V první skupině mají zaměstnanci průměrný měsíční plat 45 000 korun, ve druhé pobírají průměrně 30 000 korun. Průměrný měsíční plat všech zaměstnanců firmy je 32 400 korun.

Kolik procent zaměstnanců je zařazeno do druhé skupiny?

- A) méně než 75 %
- B) alespoň 75 %, ale méně než 80 %
- C) alespoň 80 %, ale méně než 85 %
- D) alespoň 85 %, ale méně než 90 %
- E) nejméně 90 %

Úloha 19

2 body

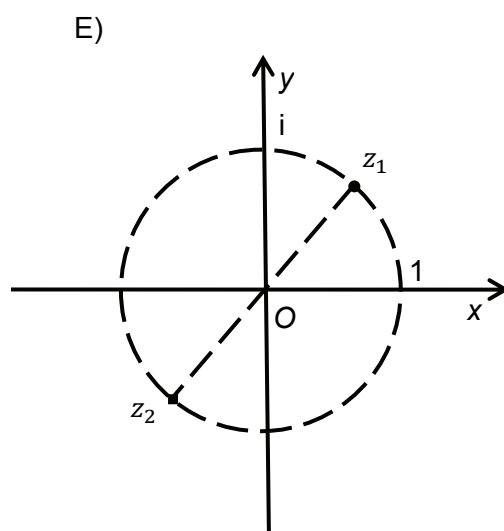
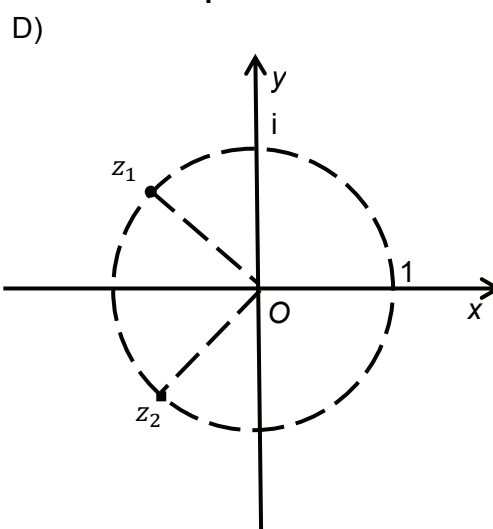
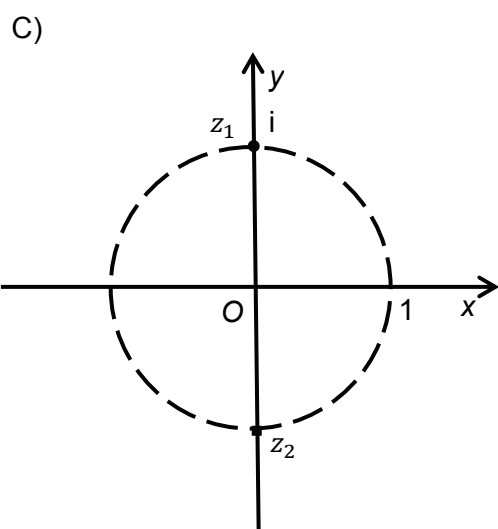
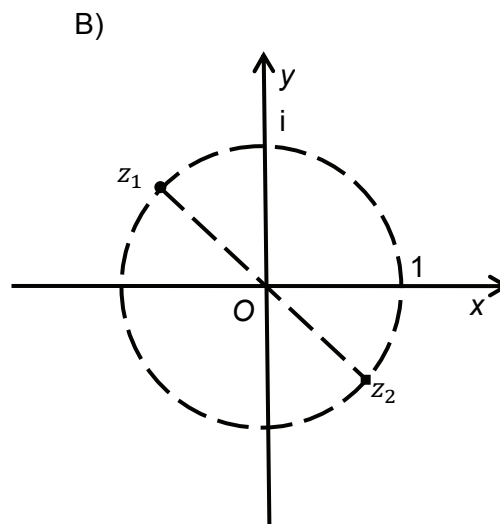
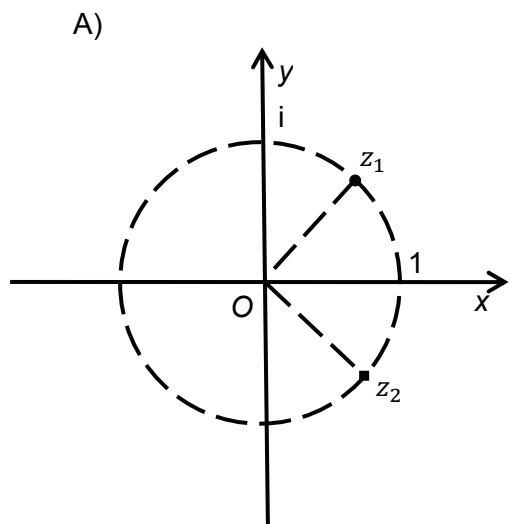
Martin si půjčil částku 42 000 korun. Na konci každého úrokovacího období splatil 6 000 korun. Po pěti splátkách se dlužná částka snížila na 20 000 korun. Kolik procent z **dosud zaplacených** peněz šlo na platbu úroků?

- A) téměř 24 %
- B) téměř 27 %
- C) 30 %
- D) asi 33 %
- E) jiný počet

Úloha 20

2 body

Hledáme komplexní číslo, jehož druhá mocnina je rovna číslu i (tj. imaginární jednotce). Na kterém z obrázků jsou zobrazena obě komplexní čísla z_1, z_2 s touto vlastností?



Úloha 21

max. 3 body

Přirozené číslo n má na **předposledním** místě pětku a zbývajících 29 cifer tvoří dvojky.

O každém z následujících tvrzení 1–4 rozhodněte, je-li **pravdivé (Ano)**, nebo **nepravdivé (Ne)**.

1. Číslo n je dělitelné čtyřmi.
2. Číslo n je dělitelné osmi.
3. Číslo n je dělitelné devíti.
4. Číslo n je dělitelné šesti.