

MATEMATIKA

vyšší úroveň obtížnosti

MAMVD12C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

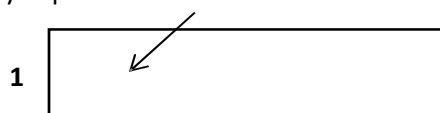
- Didaktický test obsahuje 23 úloh.
- Časový limit pro řešení didaktického testu je uveden na záznamovém archu.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulačtor bez grafického režimu.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Za nesprávnou nebo neuvedenou odpověď se body neodečítají.
- Odpovědi píše do záznamového archu.
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–12) tvoří úlohy otevřené.
- Ve druhé části (úlohy 13–23) jsou uzavřené úlohy, které obsahují i nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je právě jedna odpověď správná.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte modrou nebo černou propisovací tužkou, která píše dostatečně silně a nepřerušovaně.
- U úloh, kde budete rýsovat obyčejnou tužkou, obtáhněte čáry a křivky následně propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

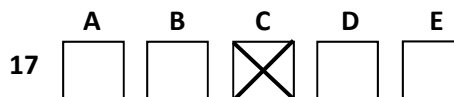
- Výsledky píše čitelně do vyznačených bílých polí.



- Je-li požadováno řešení, uveďte kromě výsledku celý postup řešení.
- Zápisy uvedené mimo vyznačená bílá pole nebudou hodnoceny.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově запиšte správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, zabarvěte pečlivě původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.
- Pokud zakřížkujete více než jedno pole, bude vaše odpověď považována za nesprávnou.

Testový sešit neotvírejte, počkejte na pokyn!

max. 2 body

- 1 Najděte nejmenší sudé číslo k tak, aby součin $k \cdot 5^{27} \cdot 3$ byl třetí mocninou nějakého přirozeného čísla.

1 bod

- 2 Existují dvě různá komplexní čísla z taková, že $z^3 = 1$ a současně $z \neq 1$.
Vypočtěte součet těchto dvou čísel.

max. 2 body

3 Pro $x \in \mathbf{R}$ řešte:

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2}{x+2}$$

max. 2 body

4 Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte:

$$\sqrt{5-x} = -1-x$$

1 bod

5 Zjednodušte pro $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2^{n+3}}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}} =$$

1 bod

- 6 V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $\frac{a_8}{a_2} = 64$.

Vypočtěte:

$$\frac{a_7}{a_3} =$$

max. 2 body

- 7 Přímky p , q jsou rovnoběžné. Platí:

$$p: 12x + 5y + 6 = 0,$$

$$q: ax + 3y - 12 = 0, \text{ kde } a \text{ představuje reálné číslo.}$$

Určete vzdálenost přímek p , q .

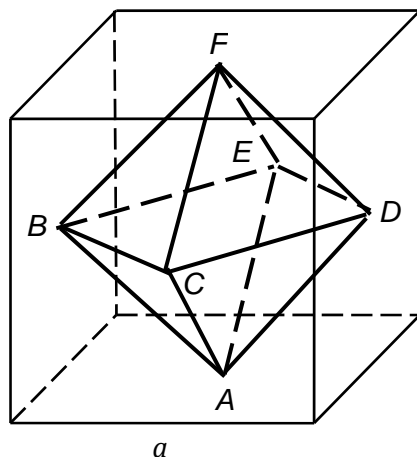
max. 2 body

- 8 Kružnice k, l se středy $S[-4; 2]$ a $L[3; 9]$ se vzájemně dotýkají (může jít o vnější nebo vnitřní dotyk). Bod dotyku leží na souřadnicové ose x nebo y .

Zapište rovnici kružnice, která vyhovuje uvedeným podmínkám a má nejmenší možný poloměr.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 9–10

Středů stěn krychle s hranou a tvoří vrcholy pravidelného osmistěnu $ABCDEF$.



(CERMAT)

1 bod

9 Vyjádřete délku lomené čáry $ABCDEF$ v závislosti na veličině a .

max. 2 body

10 Vypočtěte, jakou část objemu krychle vyplní osmistěn, a výsledek vyjádřete zlomkem.

max. 5 bodů

11 Pro $n \in \mathbf{N}$ je definován výraz:

$$V(n) = \log 2^n - \log 2^{n-1} + \log 2^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \log 2$$

11.1 Vyjádřete jediným členem $V(3)$.

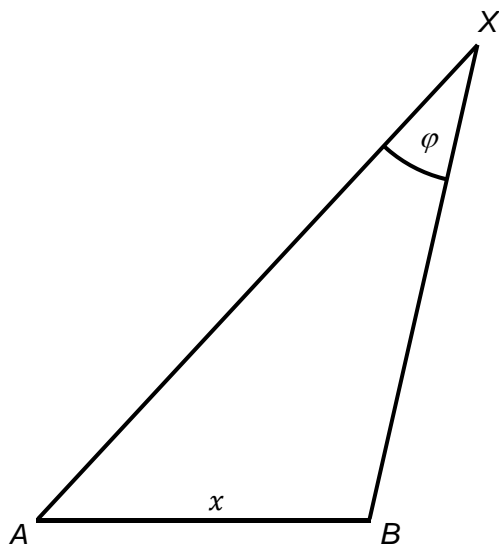
11.2 Vypočtěte podíl $\frac{V(5)}{V(4)}$.

11.3 Vypočtěte rozdíl $V(100) - V(99)$.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

VÝCHOZÍ TEXT A PLÁNEK K ÚLOZE 12

Dvě místa A a B , jejichž skutečná vzdálenost je $x = 350$ m, jsou pozorována z neznámého místa X pod zorným úhlem $\varphi = 30^\circ$.



(CERMAT)

max. 4 body

12

- 12.1 Na plánu (viz záznamový arch) k dané úsečce AB **sestrojte** množinu všech bodů X vyhovující uvedené podmínce, a to pouze v jedné polorovině s hraniční přímkou AB .
- 12.2 V sestrojené množině umístěte bod X_0 , který má největší vzdálenost od bodu B , a **zdůvodněte** jeho umístění.
- 12.3 S přesností na celé metry určete skutečnou vzdálenost X_0B , uveďte **postup výpočtu**.

V záznamovém archu používejte při konstrukci rýsovací potřeby a vše **obtáhněte** propisovací tužkou.

max. 3 body

13 Je dána rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$ a parametrem $a \in \mathbf{R}$:

$$a^2 - 1 = \frac{a + 1}{x - 2}$$

Přiřaďte ke každé z uvedených hodnot parametru a (13.1–13.3) odpovídající řešení dané rovnice (A–E):

13.1 $a = 1$ _____

13.2 $a = -1$ _____

13.3 $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$ _____

- A) Prázdná množina.
- B) Jednoprvková množina.
- C) Množina všech reálných čísel.
- D) Množina všech reálných čísel různých od čísel 1 a -1 .
- E) Množina všech reálných čísel různých od čísla 2.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

V osudí je 6 koulí označených písmeny K, L, M, N, O, P. Koule se postupně vytahují a žádná z nich se do osudí nevrací.

(CERMAT)

max. 3 body

14 Přiřaďte ke každému jevu (14.1–14.3) pravděpodobnost (A–E), s níž může nastat:

14.1 Druhá v pořadí bude tažena koule M. _____

14.2 Mezi prvními třemi taženými koulemi bude koule M. _____

14.3 Mezi prvními třemi bude tažena koule M, avšak ne první v pořadí. _____

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{5}{6}$

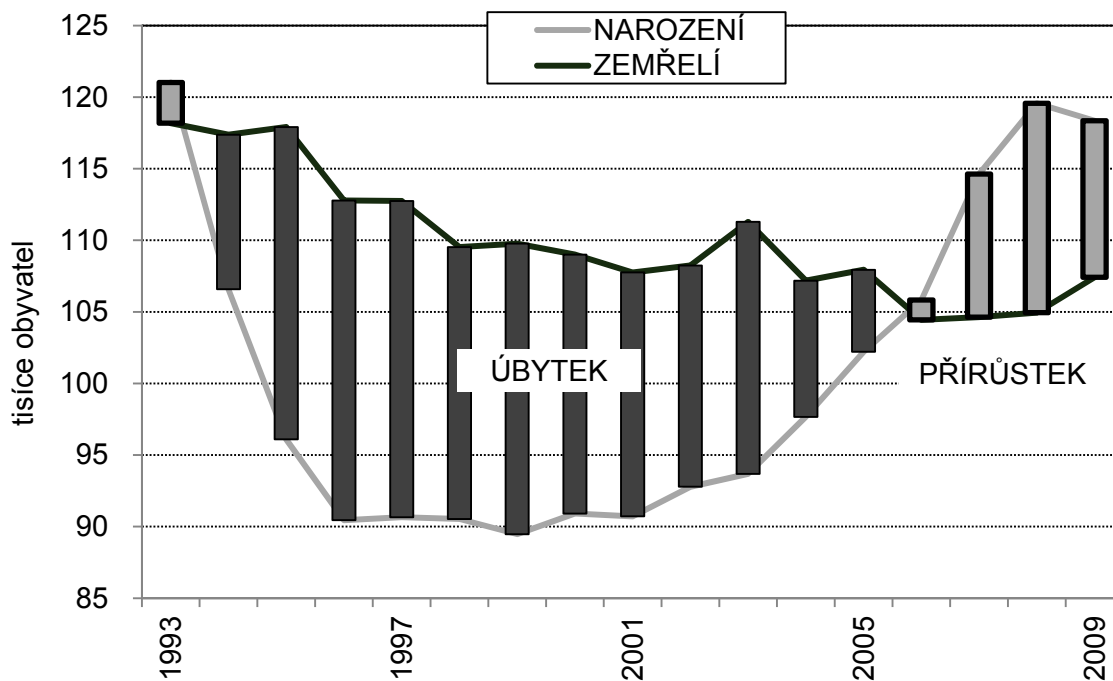
C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{1}{2}$

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 15

V grafu jsou uvedeny změny počtu obyvatel Kocourkova (v tisících) v letech 1993 až 2009.



Na počátku r. 2007 měl Kocourkov 5 milionů obyvatel.

(CERMAT)

2 body

15 Jaký je celkový procentní přírůstek počtu obyvatel Kocourkova za období tří let 2007–2009?

- A) přibližně 23 %
- B) přibližně 7 %
- C) přibližně 2,3 %
- D) přibližně 0,7 %
- E) přibližně 0,23 %

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

Po výměně ředitele multikina se zvýšila celková návštěvnost o 15 %. Počet dětských návštěvníků, kteří dříve odebírali desetinu prodaných vstupenek, se díky účasti škol zvýšil o 45 %, naopak počet důchodců, kteří dříve odebírali pětinu prodaných vstupenek, se nezměnil.

(CERMAT)

2 body

16 O kolik procent se zvýšil počet ostatních návštěvníků?

- A) méně než o 13 %
- B) o 13 %
- C) o 14 %
- D) o 15 %
- E) více než o 15 %

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 17

Předpokládejme, že 25 % vzdělaných lidí je bohatých a mezi bohatými je polovina vzdělaných. Předpokládejme dále, že 25 % lidí není ani bohatých ani vzdělaných.

(CERMAT)

2 body

17 Kolik procent lidí je vzdělaných a zároveň bohatých?

- A) 12,5 %
- B) 15 %
- C) 17,5 %
- D) 20 %
- E) Žádný z uvedených výsledků není správný.

2 body

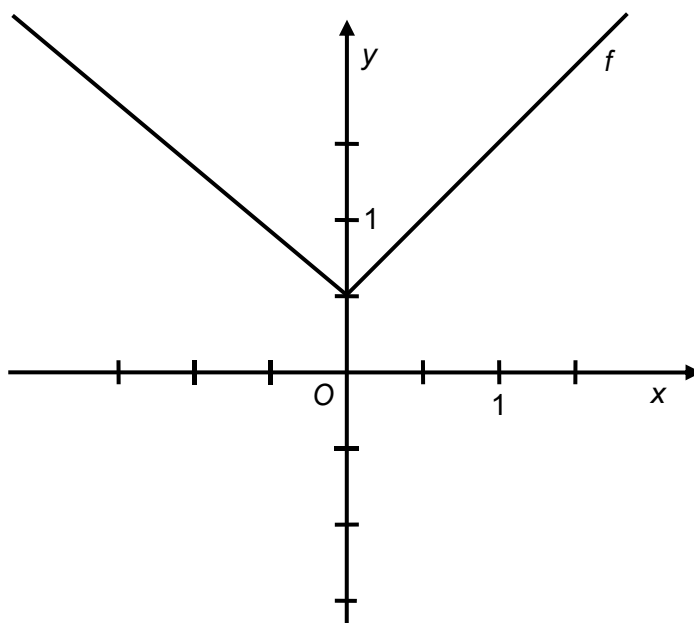
- 18** Elipsa, jejíž osy jsou rovnoběžné s osami souřadnic x , y , se jedné z nich dotýká v bodě $X[2; 0]$ a druhou osu protíná v bodech $Y_1[0; 2]$ a $Y_2[0; 4]$.

Jaká je vzdálenost ohniska od vedlejšího vrcholu elipsy?

- A) větší než 3
- B) přesně 3
- C) přesně 2,9
- D) přibližně 2,9
- E) menší než 2,9

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 19

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestrojen graf funkce f .



Hodnoty funkce g jsou převrácenými hodnotami funkce f , tedy platí:

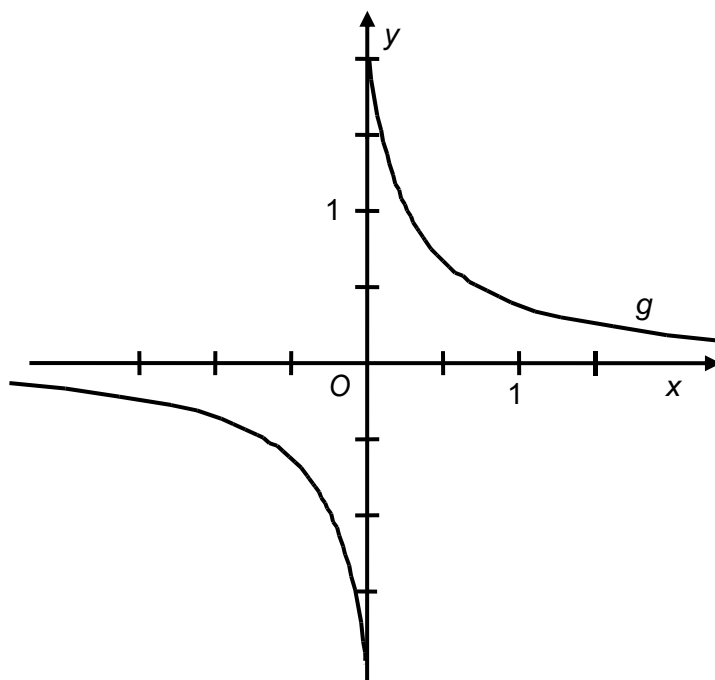
$$g: y = \frac{1}{f(x)}$$

(CERMAT)

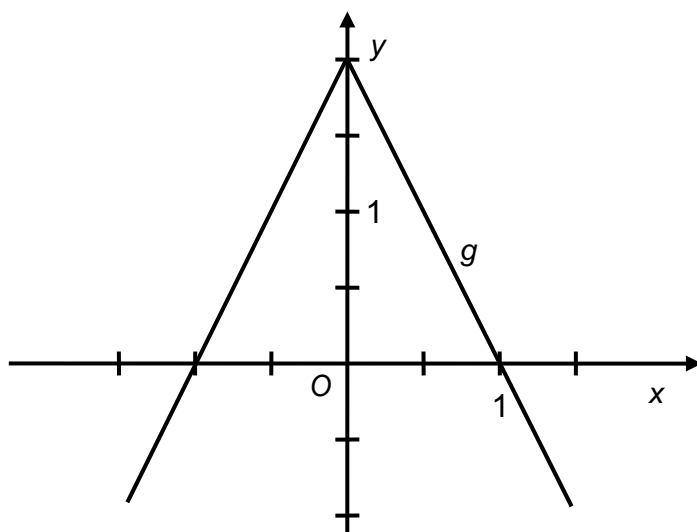
2 body

19 Který z následujících grafů je grafem funkce g ?

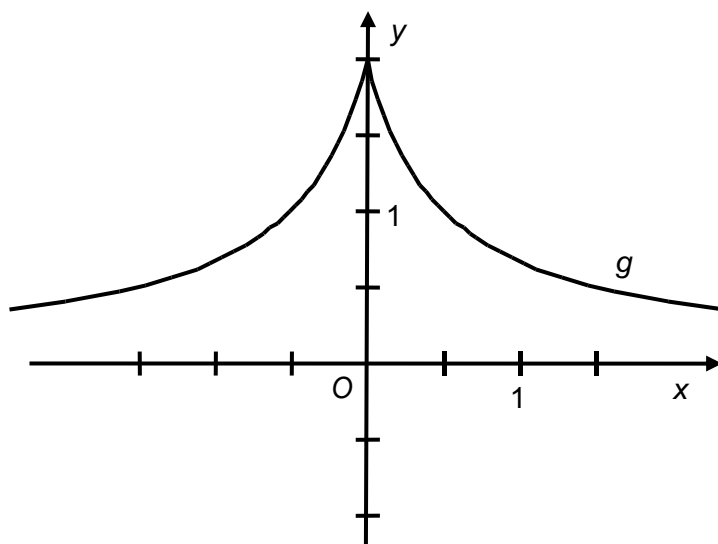
A)



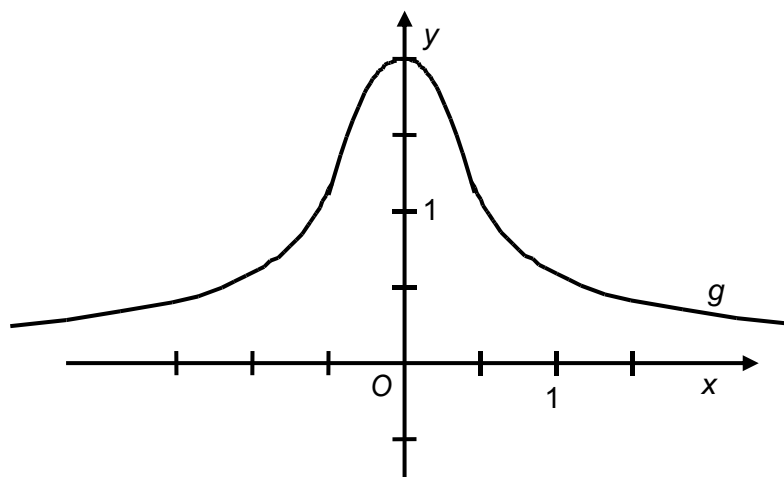
B)



C)



D)



E) žádný z uvedených grafů

2 body

20 Pro vnitřní úhel α obecného trojúhelníku ABC platí, že hodnoty

$$\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \frac{1}{\cos \alpha}$$

tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

Jaký je kvocient této posloupnosti?

A) $q = \sqrt{2}$

B) $q = \sqrt{3}$

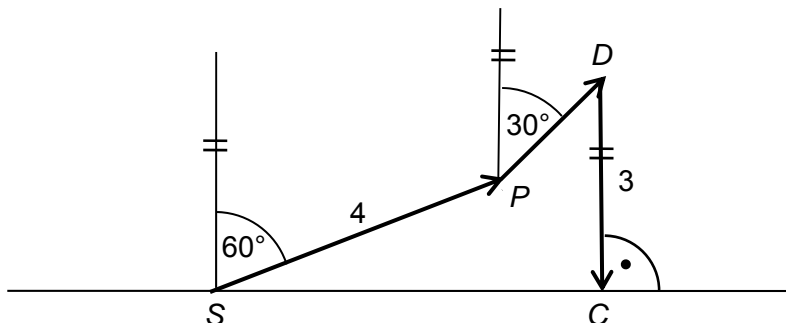
C) $q = 2\sqrt{3}$

D) $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$

E) Ze zadaných údajů nelze kvocient q určit.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

V orientačním závodě je cíl C umístěn východně od startu S . Na obrázku jsou zakreslena obě stanoviště P a D , uvedené vzdálenosti jsou v km.



(CERMAT)

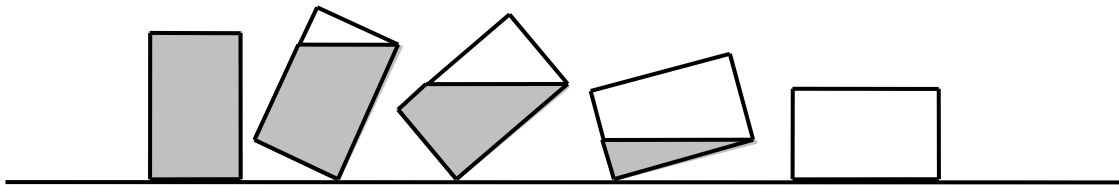
2 body

21 S přesností na celé metry uveďte vzdálenost od prvního ke druhému stanovišti, tj. $|PD|$.

- A) 1 155 m
- B) 1 196 m
- C) 1 732 m
- D) 2 000 m
- E) jiná vzdálenost

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

Pokud se válec naplněný kapalinou nakloní o 60° , polovina objemu válce se vyprázdní.



(CERMAT)

2 body

22 V jakém poměru jsou poloměr r podstavy a výška v válce?

- A) $r : v = \sqrt{3} : 2$
- B) $r : v = \sqrt{3} : 4$
- C) $r : v = \sqrt{3} : 6$
- D) $r : v = 1 : 2$
- E) $r : v = 1 : 4$

max. 3 body

23 Je dán mnohočlen M s proměnnou $x \in \mathbf{R}$ a koeficienty $b, c, d \in \mathbf{Z}$:
 $M(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

Platí: $M(0) = 1$; $M(1) = 0$; $M(-1) = 2$.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (23.1–23.3), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE):

- | | A | N |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 23.1 Právě jeden z koeficientů b, c, d je nulový. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 23.2 Právě jeden koeficient je záporný. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 23.3 Platí $M(2) = 5$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.
