MATEMATIKA – VYŠŠÍ ÚROVEŇ

DIDAKTICKÝ TEST

Testový sešit obsahuje 20 úloh.

Na řešení úloh máte 120 minut.

Úlohy řešte v testovém sešitu.

Odpovědi pište do záznamového archu.

Počet bodů za správně vyřešenou úlohu je uveden u čísla úlohy vpravo.

Je-li u počtu bodů zkratka max., je možné za řešení úlohy získat i dílčí body.

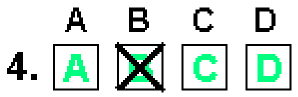
U všech úloh/podúloh je právě jedna odpověď správná.

Za nesprávnou nebo neuvedenou odpověď se body neodečítají.

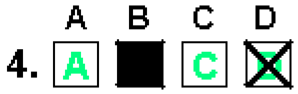
V průběhu testování je povoleno používat Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu.

Pokyny pro vyplňování záznamového archu

- Nejdříve nalepte podle pokynů zadavatele na vyznačené místo v záznamovém archu identifikační štítek s čárovým kódem.
- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném poli záznamového archu.

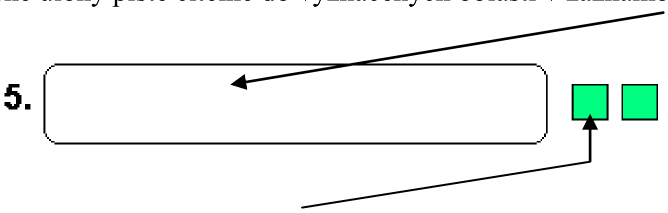


- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoli jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.
- Pokud zakřížkujete více než jedno pole, bude vaše odpověď považována za nesprávnou.

- Odpovědi na otevřené úlohy pište čitelně do vyznačených oblastí v záznamovém archu.



- Do barevných polí nic nevpisujte.
- Pište modrou nebo černou propisovací tužkou.

Zadání neotvírejte, počkejte na pokyn!

Úloha 1 **max. 2b.**

Najděte nejmenší přirozené číslo c takové, aby nejmenší společný násobek čísel c, 42 a 12 byl 252, tedy $n(c, 42, 12) = 252$.

Úloha 2 **max. 2b.**

Vypočtěte číslo q, kde $q = \left(6 \cdot 10^{30} + 3 \cdot 10^{16}\right) : 12$. Číslo q zapište rozvinutým zápisem v desítkové soustavě, podobně jako je zapsán dělenec.

Úloha 3 **max. 2b.**

Určete nejmenší hodnotu proměnné $z \in \mathbf{R}$, pro níž platí: $z + 1 = \left(\sqrt{z+5} - 2\right) \cdot \left(\sqrt{z+5} + 2\right)$.

Úloha 4 **max. 2b.**

Výraz $V(x) = (x-2) \cdot (x+1)$ je definován pro všechna $x \in \mathbf{R}$.

4.1 Pro která x je hodnota výrazu $V(x)$ nulová?

4.2 Určete nejmenší hodnotu výrazu $V(x)$.

Úloha 5 **max. 2b.**

Určete hodnotu neznámé $t \in \mathbf{R}$ v rovnici $0{,}25^t = 4$.

Úloha 6 **max. 2b.**

Upravte výraz a vypočtěte r, kde $r = 0{,}5 \cdot \log_4 100 - \log_4 5$.

Úloha 7 **max. 2b.**

Určete hodnotu $y \in \mathbf{R}$, kde $y = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$, jestliže je $\sin \alpha = \dfrac{1}{2}$ a $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi \right)$.

Úloha 8 **max. 2b.**

Určete souřadnice středu S úsečky PQ dané parametrickým vyjádřením:

PQ: $x = 1 - t$

$y = 2t$, kde $t \in \langle -5; 1 \rangle$.

Úloha 9 **max. 2b.**

Desátý člen aritmetické posloupnosti je nulový ($a_{10} = 0$). Určete podíl p nenulových členů a_{20} a a_{30}:

$$p = \frac{a_{20}}{a_{30}}.$$

Úloha 10 **max. 2b.**

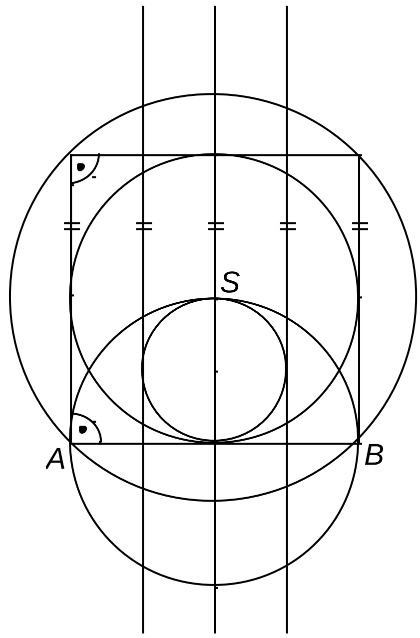
Vypočtěte číslo s:

$$s = \frac{2006!}{2005!} - \frac{2005!}{2004!} + \frac{2004!}{2003!} - \ldots + \frac{2!}{1!} - \frac{1!}{0!}.$$

Úloha 11 **max. 2b.**

V polorovině ABS najděte a vyznačte vrchol C trojúhelníku ABC, jehož vnitřní úhel při vrcholu C má velikost $45°$ a délka strany a $(= BC)$ je shodná s délkou těžnice t_c na stranu c $(= AB)$.

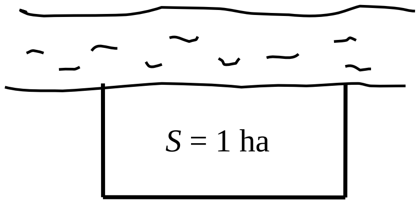
Všechna řešení vyznačte v obrázku uvedeném v záznamovém archu.



Úloha 12 **max. 4b.**

Pozemek tvaru obdélníka má výměru 1 hektar. Jedna jeho **delší** strana je ohraničena řekou, pouze tři zbývající strany jsou oploceny. Délka plotu je 285 metrů. Jaké jsou rozměry pozemku?

Do záznamového archu uveďte celé řešení.



Úloha 13 **max. 5b.**

Slečna Hermína disponuje částkou 8 500 korun, proto se rozhodla navštívit velký svět financí. Zaujal ji plakát firmy „MOULA&spol.“, v němž stálo:

Naše firma zhodnotí Vaše peníze! Za 100 dnů si splníte své sny!

Za jednorázovou investici v hodnotě 10 000 korun a více garantujeme 6% zisk za 100 dnů.

Dokonce i investice pod 10 000 korun *Vám přinese* za 100 dnů 3% zisk.

Chybí Vám peníze? Půjčíme Vám až 10 000 korun na 100 dnů!

Teprve až uplyne celých 100 dnů, zaplatíte 15% úrok z půjčené částky.

Hermína by ráda investovala 10 000 korun, a proto zvažovala možnost půjčky. Zodpovězte následující otázky za předpokladu, že firma dostojí svým slibům.

13.1 Jaký bude zisk Hermíny, pokud si žádné peníze nepůjčí a investuje jen částku 8 500 korun?

13.2 O kolik korun se zvýší její zisk, pokud si chybějící peníze od firmy půjčí a investuje 10 000 korun?

13.3 Pokud by měla Hermína o něco méně než 8 500 korun, investice s půjčkou by se jí mohla stále ještě vyplatit. Naopak pro nízké částky je výhodnější investice bez půjčky. Pro jakou částku přinášejí obě možnosti (investice částky s půjčkou i bez půjčky) stejný zisk?

Do záznamového archu uveďte celé řešení.

Úloha 14 **max. 4b.**

V $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ jsou dány funkce $f:\ y = (x+4)^{-2}$ a funkce $g:\ y = 4 - \sqrt{\log(x-3)}$.

Určete následující množiny:

14.1 definiční obor D_f funkce f,

14.2 obor hodnot H_f funkce f,

14.3 definiční obor D_g funkce g,

14.4 obor hodnot H_g funkce g.

Příslušné množiny vybírejte z následujících nabídek A–F:

A) $\mathbf{R} \setminus \{-4\}$

B) $(-\infty; 4)$

C) $(-\infty; 4\rangle$

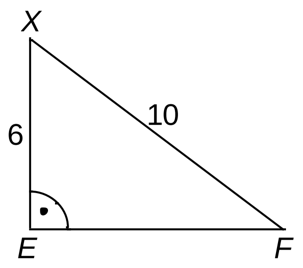
D) $\langle 4; \infty)$

E) $(4; \infty)$

F) jiná možnost

Úloha 15 **max. 4b.**

Na kuželosečce s ohnisky E, F leží bod X. Umístění bodů je v náčrtku.



Z hodnot uvedených v A–F vyberte:

15.1 velikost delší poloosy, je-li kuželosečkou elipsa,

15.2 velikost kratší poloosy, je-li kuželosečkou elipsa,

15.3 velikost **delší** poloosy, je-li kuželosečkou hyperbola,

15.4 velikost **kratší** poloosy, je-li kuželosečkou hyperbola.

A) $\sqrt{3}$

B) 2

C) $2 \cdot \sqrt{3}$

D) $3 \cdot \sqrt{3}$

E) 8

F) jiná hodnota

Pozor! U hyperboly nemusí být hlavní poloosa delší než vedlejší.

Úloha 16 **2b.**

Stěnová a tělesová úhlopříčka v krychli vycházejí z téhož vrcholu. Jejich odchylka je φ.

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

B) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Úloha 17 **2b.**

Za půl roku zaplatila domácnost *s* Kč za spotřebovanou elektrickou energii. Měsíční poplatek za pronájem elektroměru byl přitom *r* Kč a spotřeba 1 kWh stála *t* Kč. Kolik kWh domácnost za toto období spotřebovala?

A) $\left(\frac{s+6r}{t}\right)$ kWh

B) $\left(\frac{t}{s-6r}\right)$ kWh

C) $\left(\frac{s-6r}{t}\right)$ kWh

D) $\left(\frac{6r-s}{t}\right)$ kWh

Úloha 18 **2b.**

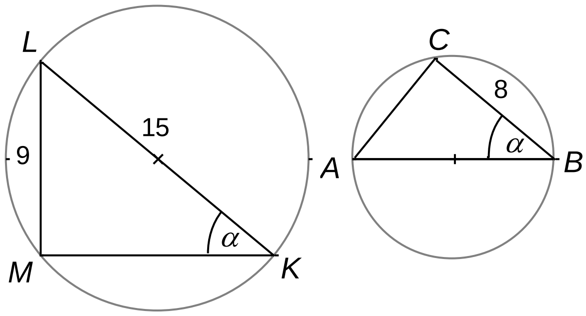
Průměry kružnic jsou úsečky KL a AB. Určete koeficient podobnosti k ($0 < k < 1$) daných trojúhelníků.

A) $k = \dfrac{8}{15}$

B) $k = \dfrac{3}{5}$

C) $k = \dfrac{2}{3}$

D) jiná hodnota



Úloha 19 **2b.**

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+n}{4+n} = \dfrac{3}{4}$

B) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{(2n+4)^2} = \dfrac{3}{4}$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{4n^2} = \dfrac{3}{4}$

D) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n\cdot(3n+1)}{4n\cdot(4n+1)} = \dfrac{3}{4}$

Úloha 20 **max. 3b.**

Hází se dvěma hracími kostkami s 1, 2 až 6 oky na stěnách. Označme následující jevy:

J: Počty ok, které padnou na obou kostkách, se liší o jednotku.
D: Počty ok, které padnou na obou kostkách, se liší o dvě.
T: Počty ok, které padnou na obou kostkách, se liší o tři.
S: Na obou kostkách padne stejný počet ok.

Pravděpodobnosti jednotlivých jevů označme po řadě $P(\mathrm{J}), P(\mathrm{D}), P(\mathrm{T}), P(\mathrm{S})$.

Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (ANO), nebo nepravdivá (NE).

20.1 $P(\mathrm{S}) = \dfrac{1}{6}$ (ANO–NE)

20.2 $P(\mathrm{J}) > P(\mathrm{D})$ (ANO–NE)

20.3 $P(\mathrm{S}) \neq P(\mathrm{T})$ (ANO–NE)

20.4 $P(\mathrm{D}) = P(\mathrm{T})$ (ANO–NE)

KONEC TESTU